



Polski Związek Inżynierów i Techników Budownictwa
Rada Programowa Czasopism i Wydawnictw PZITB

DYPLOM

w konkursie autorskim artykułów wyróżniających się
ujęciem tematyki i przydatnością praktyczną, opublikowanych
na łamach miesięcznika „Inżynieria i Budownictwo” w roku 2021

Rada Programowa Czasopism i Wydawnictw PZITB

przyznała

III NAGRODĘ

za artykuł pt. „Praktyczny sposób szacowania współczynników równoważnego momentu
stałego przy zwichrzeniu stalowych elementów zginanych” (nr 4/2021).

Laureatami zostali

Dr hab. inż. ANNA BARSZCZ
Prof. dr hab. inż. MARIAN GIŻEJOWSKI
Mgr inż. MALWINA PĘKACKA

SERDECZNIE GRATULUJEMY

W imieniu Kolegium Redakcyjnego

Prof. dr hab. inż. Barbara Goszczyńska
Redaktor naczelna

W imieniu Rady Programowej

Prof. dr hab. inż. Anna Halicka
Przewodnicząca Rady

Praktyczny sposób szacowania współczynników równoważnego momentu stałego przy zwichrzeniu stalowych elementów zginanych

Projektowanie nieusztynwionych poprzecznie i przeciwniebieżnie elementów dwuteowych zginanych w płaszczyźnie większej bezwładności, będących częścią składową stalowych ustrojów szkieletowych, wymaga uwzględnienia wpływu zwichrzenia na stan graniczny nośności. Dogodną ocenę momentu krytycznego elementów w złożonym stanie obciążenia można przeprowadzić, zakładając, że wykres momentu zginającego M_y zostanie przedstawiony jako superpozycja wykresów bazowych, symetrycznego $M_{y,s}$ oraz antysymetrycznego $M_{y,a}$. W pracy magisterskiej [6] oraz artykule autorów [7] przedstawiono sposób wyznaczenia współczynnika równoważnego momentu stałego C_{bc} , odniesionego do złożonych przypadków obciążenia, na podstawie współczynników dotyczących bazowych wykresów momentu w złożonym stanie obciążenia, tj. $1/C_{bs}$ (stan symetryczny) oraz $1/C_{ba}$ (stan antysymetryczny). Moment krytyczny przy zwichrzeniu można wówczas obliczać ze wzoru

$$M_{cr} = C_{bc} M_{cr,0}, \quad (1)$$

w którym:

C_{bc} – współczynnik konwersji zależny od rozkładu momentu (współczynnik równoważnego momentu stałego)

$$C_{bc} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_{y,s,max}}{M_{y,max}}\right)^2 \frac{1}{C_{bs}} + \left(\frac{M_{y,a,max}}{M_{y,max}}\right)^2 \frac{1}{C_{ba}}}}, \quad (2)$$

C_{bs} , C_{ba} – współczynniki konwersji odpowiadające odpowiednio stanowi symetrycznemu i antysymetrycznemu:

$$\frac{1}{C_{bs}} = 2 \int_0^1 m_{y,s}^2 \sin^2(\pi \xi) d\xi, \quad \frac{1}{C_{ba}} = 2 \int_0^1 m_{y,a}^2 \sin^2(\pi \xi) d\xi \quad (3)$$

oraz:

$$m_{y,s} = \frac{M_{y,s}(\xi)}{M_{y,s,max}} - \text{bezwymiarowe wyrażenie na moment zginający schematu symetrycznego (argument funkcji momentu podano w nawiasie),}$$

$$m_{y,a} = \frac{M_{y,a}(\xi)}{M_{y,a,max}} - \text{bezwymiarowe wyrażenie na moment zginający schematu antysymetrycznego,}$$

$\xi = x/L$, x – współrzędna wzdłuż osi pręta,

L – długość pręta,

M_{cr} – moment krytyczny odpowiadający rozważanemu przypadkowi obciążenia,

$M_{cr,0}$ – moment krytyczny odpowiadający przypadkowi stałego momentu zginającego na długości belki,

$M_{y,max}$ – moment maksymalny odpowiadający rozważanemu przypadkowi obciążenia,

$M_{y,s,max}$ – moment maksymalny odpowiadający symetrycznemu składnikowi wykresu momentu zginającego,

$M_{y,a,max}$ – moment maksymalny odpowiadający antysymetrycznemu składnikowi wykresu momentu zginającego.

Współczynniki $1/C_{bs}$ i $1/C_{ba}$ są wyrażeniami całkowanymi po długości elementu. Funkcje podcałkowe są iloczynami bezwymiarowych wyrażeń opisujących przebieg momentów zginających, odpowiednio składnika symetrycznego i antysymetrycznego, oraz kwadratu funkcji trygonometrycznej sinus. W wypadku złożonych stanów obciążenia funkcje podcałkowe są na ogół skomplikowane i ich „dokładne” obliczenie na podstawie analitycznego całkowania może być kłopotliwe.

W praktyce projektanci są zazwyczaj skoncentrowani na przygotowaniu projektu budowlanego w możliwie krótkim czasie, który nie pozwala na podjęcie działań ukierunkowanych naukowo, o charakterze analitycznych zadań obliczeniowych. W związku z tym są opracowywane metody przybliżone rozwiązywania zadań analitycznych, np. przybliżone metody numerycznego całkowania. Wynikowe zależności przedstawiono w literaturze, a w ramach prac dyplomowych na wielu uczelniach są prowadzone badania weryfikujące wzory otrzymane na podstawie metod numerycznego całkowania, np. [5].

W pracy [6] podano rozwiązania z zastosowaniem dokładnego, analitycznego całkowania wyrażeń podcałkowych we wzorach (3) w odniesieniu do dwóch stanów obciążenia najczęściej występujących w praktyce. Przypadki te dotyczą występowania momentów na końcach (o różnej wartości i znaku) oraz obciążenia przesłowego rozłożonego równomiernie lub sił skupionych usytuowanych w tej samej, ale dowolnej odległości od podpór (oba obciążenia poprzeczne mogą mieć różne wartości na obu połowach rozpiętości). Inne przypadki obciążenia wymagają oddzielnego rozpatrzenia i przeprowadzenia całkowania wyrażeń podcałkowych odpowiadających rozpatrywanym schematom obciążeń złożonych.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wyników dotychczasowych badań dotyczących opracowania wzorów do przybliżonego szacowania współczynnika równoważnego momentu stałego, w tym wzorów ujętych w normalizacji. Zaproponowano zastosowanie wzoru przybliżonego z pracy [9] do wyznaczenia współczynników bazowych $1/C_{bs}$ i $1/C_{ba}$ na podstawie wartości momentów

w dyskretnej liczbie punktów symetrycznego i antysymetrycznego wykresu momentu zginającego. Wyniki uzyskane z zaproponowanych wzorów zweryfikowano na podstawie wzorów zamieszczonych w [7] i odnoszących się do „dokładnego” całkowania wyrażeń podcałkowych. Wyniki zamieszczono w tablicach i porównano na rysunkach, oceniając dokładność przyjętego wzoru przybliżonego w kontekście dokładności wymaganej w praktyce inżynierskiej. Wyciągnięto wnioski praktyczne.

Obliczanie współczynnika równoważnego momentu stałego

Wyrażenie na współczynnik równoważnego momentu w przypadku liniowego rozkładu momentu zginającego zaproponował Salvadori [8], który był cytowany w wielu książkach dotyczących konstrukcji stalowych, w tym m.in. w [11]

$$C_{bc} = 1,75 + 1,05\psi_y + 0,3\psi_y^2, \quad (4)$$

gdzie zaleca się przyjmować $C_{bc} \leq 2,5$ oraz $\psi_y = M_{y,\min}/M_{y,\max}$.

Kirby i Nethercot [4] zaproponowali dla krzywoliniowego rozkładu momentu zginającego konserwatywną zależność przybliżoną w postaci

$$C_{bc} = \frac{12}{2 + 3 \frac{M_y(x=L/4)}{M_{y,\max}} + 4 \frac{M_y(x=L/2)}{M_{y,\max}} + 3 \frac{M_y(x=3L/4)}{M_{y,\max}}}, \quad (5)$$

gdzie:

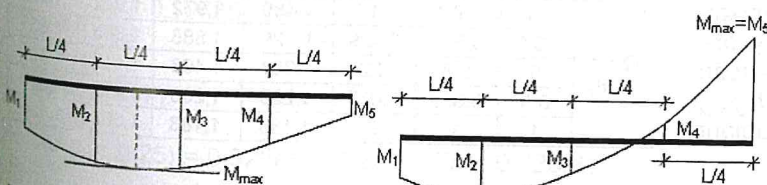
$M_y(x = x_i)$ – momenty zginające w charakterystycznych punktach na długości elementu x_i ,

$M_{y,\max}$ – moment maksymalny (podporowy lub przęsłowy), niekoniecznie w miejscu pokrywającym się z lokalizacją punktów charakterystycznych [rys. 1, na którym $M_2 = M_y(x=L/4)$, $M_3 = M_y(x=L/2)$, $M_4 = M_y(x=3L/4)$].

Pewną modyfikację zależności zaproponowanej przez Kirby'ego i Nethercota przyjęto w normie amerykańskiej AISI LRFD [1]

$$C_{bc} = \frac{12,5}{2,5 + 3 \frac{M_y(x=L/4)}{M_{y,\max}} + 4 \frac{M_y(x=L/2)}{M_{y,\max}} + 3 \frac{M_y(x=3L/4)}{M_{y,\max}}}, \quad (6)$$

gdzie zaleca się przyjmować $C_{bc} \leq 3$.



Rys. 1. Ilustracja dwóch różnych sytuacji występujących w praktyce, odpowiednio maksymalnego momentu występującego w przęśle oraz na podporze [4]: a) przebieg momentu zginającego odpowiadający pojedynczej krzywnie, b) przebieg momentu zginającego odpowiadający podwójnej krzywnie

Analizę różnych propozycji wzorów przybliżonych przedstawiono w pracy [9]. Stwierdzono, że formuła zaproponowana przez Kirby'ego i Nethercota może w niektórych przypadkach dystrybucji momentu prowadzić do wyników momentu krytycznego po stronie niebezpiecznej. Zaproponowano „pierwiastkowy” wzór przybliżony, w którym składniki $c_i M_y(x = x_i)/M_{y,\max}$ w wyrażeniach (5) i (6) – gdzie c_i są stałymi definiowanymi w punktach x_i – zostały zastąpione kwadratami tych składników

$$C_{bc} = \frac{35}{\sqrt{1 + \left(3 \frac{M_y(x=L/4)}{M_{y,\max}}\right)^2 + \left(4 \frac{M_y(x=L/2)}{M_{y,\max}}\right)^2 + \left(3 \frac{M_y(x=3L/4)}{M_{y,\max}}\right)^2}}. \quad (7)$$

Wong i Driver [10] przeanalizowali zastosowanie wzoru (7) do oceny momentu krytycznego w szeregu przypadków obciążeń złożonych, wykazując, że może ono prowadzić do wyników po stronie niebezpiecznej wówczas, gdy obciążeniu przęsłowemu rozmieszczonemu symetrycznie towarzyszą momenty podporowe o takiej samej wartości i przeciwnych znakach. Zaproponowano wzór alternatywny

$$C_{bc} = \frac{4}{\sqrt{1 + 4 \frac{M_y(x=L/4)}{M_{y,\max}} + 7 \frac{M_y(x=L/2)}{M_{y,\max}} + 4 \frac{M_y(x=3L/4)}{M_{y,\max}}}}, \quad (8)$$

w którym zaleca się przyjmować $C_{bc} \leq 2,5$.

Weryfikację wzorów (6)÷(8) przeprowadzono w ramach magisterskiej pracy dyplomowej Nawaza [5] wykonanej w University of Alberta w Kanadzie na podstawie wyników uzyskanych z symulacji zwichrzenia metodą elementów skończonych. Rozważano belki z obciążeniem przęsłowym rozmieszczonym symetrycznie i momentami podporowymi o takiej samej wartości i przeciwnych znakach. Potwierdzono, że wzory (7) i (8) mają zbliżoną dokładność. Wzór (8) daje wyniki po stronie konserwatywnej w wypadku rozważanych kombinacji obciążenia przęsłowego i momentów podporowych (13% po stronie bezpiecznej), podczas gdy wzór (7) daje wyniki bardziej zbilansowane, do 10% po stronie bezpiecznej i do 3% po stronie niebezpiecznej. Ostatecznie rekomendowano wzór (7) do nowelizacji normy kanadyjskiej [3]. Wzór (7) wykorzystuje także Bijak [2] w praktycznych obliczeniach momentu krytycznego i oszacowania nośności belek przy zwichrzeniu.

Wykorzystanie wzoru (7) do oceny wartości odwrotności współczynników konwersji $1/C_{bs}$ oraz $1/C_{ba}$ prowadzi do wzorów:

$$\frac{1}{C_{bs}} = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{M_{y,s}(\xi = 0,25)}{M_{y,s,\max}} \right]^2 + \frac{16}{35} \left[\frac{M_{y,s}(\xi = 0,50)}{M_{y,s,\max}} \right]^2, \quad (9)$$

$$\frac{1}{C_{ba}} = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{M_{y,a}(\xi = 0,25)}{M_{y,a,\max}} \right]^2,$$

ponieważ $M_{y,s}(\xi = 0,75) = M_{y,s}(\xi = 0,25)$, $M_{y,a}(\xi = 0,75) = -M_{y,a}(\xi = 0,25)$ i $M_{y,a}(\xi = 0,5) = 0$.

W dalszej części artykułu porównano współczynniki konwersji C_{bc} otrzymane ze wzorów (2) i (9) z wynikami uzyskanymi w pracy magisterskiej Pękackiej [6] (por. też [7]), w której wyprowadzono zależności na współczynniki $1/C_{bs}$ oraz $1/C_{ba}$ na podstawie jawnego całkowania funkcji podcałkowych, zgodnie ze wzorami (3). Dodatkowo pokazano wartości C_{bc} obliczone według wzoru (7) i za pomocą programu LTBeam [12].

Weryfikacja dotycząca prostych stanów obciążenia

Rozpatrzono przypadki prostych stanów obciążenia „I”, tj. momentów na podporach (symbol $i = M$) lub obciążeń przęsłowych na obu połowach rozpiętości ($i = q$ oraz $i = Q$), które są w ogólności różne co do wartości i kierunku (patrz tabl. 1 [7]). Rozważane przypadki obciążenia są scharakteryzowane współczynnikiem ψ_i z przedziału $(-1,1)$, opisującym relację między momentami podporo-

wymi lub obciążeniami na obu połowach rozpiętości. Wyniki obliczeń dotyczące odwrotności bazowych współczynników konwersji $1/C_{bs}$ oraz $1/C_{ba}$ i odpowiadających im wartości parametru momentu zestawiono w tabl. 1, a w tabl. 2 zamieszczono wynikowe współczynniki konwersji momentu C_{bc} .

Porównanie wyników przedstawiono na rys. 2, gdzie na osi rzędnych odłożono wartości C_{bc} wyznaczone ze wzoru (2) i z analitycznego całkowania współczynników bazowych $1/C_{bs}$ i $1/C_{ba}$ [oznaczono $C_{bc}(3)$], a na osi odciętych wartości C_{bc} obliczone z wykorzystaniem do wyznaczenia $1/C_{bs}$ i $1/C_{ba}$ zależności przybliżonych (9) [oznaczono $C_{bc}(9)$]. Wyniki przedstawiono w przypadku wartości ψ_i uwzględnionych w tabl. 2 i podzielono na odnoszące się do schematu obciążenia wywołującego pojedynczą krzywiznę w płaszczyźnie zginania ($\psi_i > 0$), odnoszące się do obciążenia momentami podporowymi wywołującymi podwójną krzywiznę w płaszczyźnie zginania ($\psi_i < 0$) i odnoszące się do przypadku $\psi_i = 0$. Na rysunku 2a przedstawiono wyniki dotyczące przypadków $i = M$, $i = q$ oraz $i = Q(x = L/4)$, a na rys. 2b wyniki odnoszące się do przypadków obciążenia siłami skupionymi umieszczonymi blisko podpór $i = Q(x = L/8)$ oraz blisko środka belki $i = Q(x = 3L/8)$.

Z porównania wyników przedstawionych na rys. 2 wynika, że wzory przybliżone (9) dają w wypadku obciążeń scharakteryzowanych współczynnikiem obciążenia $\psi_i \geq 0$ wynikowe współczynniki C_{bc} bardzo zbliżone do otrzymanych z zastosowaniem całkowania analitycznego [6]. W miarę, gdy zaczyna dominować antysymetryczny składnik obciążenia (współczynnik ψ_i zbliża się do wartości -1), rozbieżność wyników jest większa, szczególnie w wypadku obciążenia siłami skupionymi usytuowanymi bliżej środka rozpiętości belki. Dwie siły skupione o przeciwnym znaku, umieszczone na obu połowach rozpiętości belki w odległości coraz bliższej środka rozpiętości, dają równoważny moment skupiony w środku rozpiętości o wartości bliskiej zera. Wynikowe wartości C_{ba} na podstawie wzorów przybliżonych (9) sytuują się wówczas po stronie niebezpiecznej w stosunku do obliczeń wykorzystujących całkowanie analityczne. Rozbieżności wyników otrzymanych na podstawie całkowania analitycznego zgodnie z wzorami (3) oraz numerycznego zgodnie z wzorami (9) wynikają z dokładności oceny $1/C_{ba}$ we wzorze (9). Zależy ona w dużej mierze od tego, czy moment $M_{y,a}(x = L/4)$ nie różni się znacznie od wartości momentu maksymalnego $M_{y,a,max}$. Ponieważ sytuacja taka nie występuje, gdy siły skupione znajdują się blisko połowy rozpiętości belki, wynikowe wartości C_{bc} są obarczone błędem z uwagi na uwzględnienie tylko jednego punktu całkowania numerycznego.

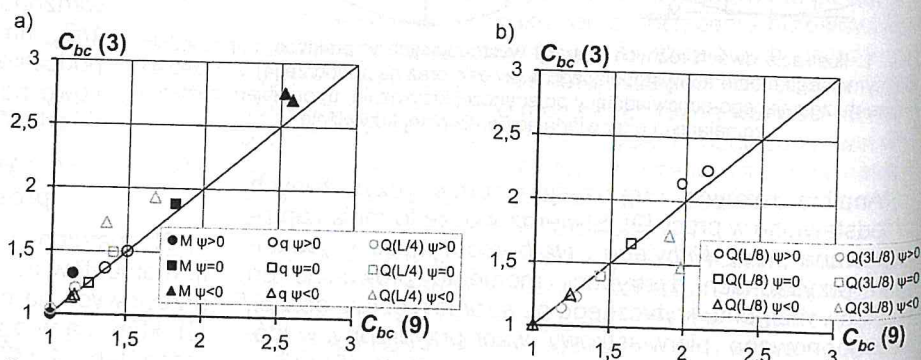
Weryfikację zastosowania wzorów (9) do wyznaczenia współczynników C_{bc} przedstawiono również w wypadku złożonych przypadków obciążenia rozważanych w przykładach z artykułu [7]. Przyjęto więc stosunek momentów podporowych $\psi_M = 0,7$ i ograniczono się do symetrycznego obciążenia poprzecznego równomiernie rozłożonego oraz siłą skupioną.

Tablica 1
Bazowe współczynniki $1/C_{bs}$ i $1/C_{ba}$ obliczone z zależności przybliżonych (9)

i	Obciążenie symetryczne			Obciążenie antysymetryczne	
	$M_{y,s} (\xi = 0,25)$	$M_{y,s} (\xi = 0,5)$	$1/C_{bs}$	$M_{y,a} (\xi = 0,25)$	$1/C_{ba}$
	$M_{y,s,max}$	$M_{y,s,max}$		$M_{y,a,max}$	
M	1	1	1	0,5	0,157
q	0,750	1	0,775	1	0,543
$Q(x = L/4)$	1	1	1	1	0,543
$Q(x = L/8)$	1	1	1	0,667	0,257
$Q(x = 3L/8)$	0,667	1	0,714	0,667	0,257

Tablica 2
Zestawienie współczynników konwersji C_{bc} obliczonych różnymi metodami

i	ψ_i	$\frac{M_{y,s,max}}{M_{y,max}}$	$\frac{M_{y,a,max}}{M_{y,max}}$	Współczynnik C_{bc}			
				Wzór (2)		Wzór (7)	LTBeam
				Całkowanie analityczne – wzory (3)	Całkowanie numeryczne – wzory (9)		
M	-1	0	1	2,766	2,523	2,523	2,668
	-0,5	0,25	0,75	2,711	2,574	2,487	2,455
	0	0,5	0,5	1,881	1,859	1,815	1,807
	0,5	0,75	0,25	1,324	1,322	1,143	1,316
	1	1	0	1	1	1	1
q	-1	0	1	1,369	1,357	1,357	1,204
	-0,5	0,640	0,480	1,504	1,503	1,486	1,429
	0	0,889	0,222	1,248	1,251	1,246	1,232
	0,5	0,980	0,082	1,153	1,157	1,156	1,149
	1	1	0	1,133	1,136	1,136	1,130
$Q(x = L/4)$	-1	0	1	1,727	1,357	1,357	1,712
	-0,5	0,4	0,6	1,930	1,677	1,646	1,794
	0	0,667	0,333	1,494	1,408	1,390	1,457
	0,5	0,857	0,143	1,207	1,158	1,153	1,202
	1	1	0	1,039	1	1	1,039
$Q(x = L/8)$	-1	0	1	2,141	1,972	1,972	2,053
	-0,5	0,308	0,692	2,246	2,142	2,085	2,027
	0	0,571	0,429	1,659	1,636	1,606	1,590
	0,5	0,8	0,2	1,248	1,240	1,231	1,238
	1	1	0	1,005	1	1	1,004
$Q(x = 3L/8)$	-1	0	1	1,480	1,972	1,972	1,472
	-0,5	0,571	0,429	1,725	1,888	1,843	1,635
	0	0,8	0,2	1,397	1,463	1,449	1,371
	0,5	0,823	0,077	1,230	1,280	1,276	1,221
	1	1	0	1,138	1,183	1,183	1,134



Rys. 2. Porównanie wyników C_{bc} otrzymanych na podstawie $1/C_{bs}$ i $1/C_{ba}$ wyznaczonych z całkowania analitycznego (3) oraz ze wzorów przybliżonych (9): a) schematy $i = M$, $i = q$ oraz $i = Q(x = L/4)$, b) schematy $i = Q(x = L/8)$ oraz $i = Q(x = 3L/8)$

Przykład 1

Obliczenia dotyczą obciążenia momentami podporo-
mi i na całej długości obciążeniem równomiernie
łożonym ($\psi_q = 1$), z parametrem $\mu = \frac{qL^2}{8M_y} = -1,2$.

Z obliczeń przedstawionych w artykule [7]:

$$M_{y,M+q,s,\max} = 0,85M_y, \quad M_{y,M+q,a,\max} = 0,15M_y, \\ M_{y,M+q,\max} = M_y.$$

Momenty w charakterystycznych punktach wynoszą:

$$M_{y,s}(\xi = 0,25) = 0,85M_y - 1,2M_y \cdot 0,75 = -0,05M_y, \\ M_{y,s}(\xi = 0,5) = 0,85M_y - 1,2M_y = -0,35M_y, \\ M_{y,a}(\xi = 0,25) = 0,5 \cdot 0,15M_y = 0,075M_y.$$

Ze wzorów (9):

$$\frac{1}{C_{bs}} = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{M_{y,s}(\xi = 0,25)}{M_{y,M+q,s,\max}} \right]^2 + \frac{16}{35} \left[\frac{M_{y,s}(\xi = 0,50)}{M_{y,M+q,s,\max}} \right]^2 = \\ = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{-0,05M_y}{0,85M_y} \right]^2 + \frac{16}{35} \left[\frac{-0,35M_y}{0,85M_y} \right]^2 = 0,10786,$$

$$\frac{1}{C_{ba}} = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{M_{y,a}(\xi = 0,25)}{M_{y,M+q,a,\max}} \right]^2 = \\ = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{0,075M_y}{0,15M_y} \right]^2 = 0,15714.$$

Ze wzoru (2)

$$C_{bc} = \left[\left(\frac{M_{y,M+q,s,\max}}{M_{y,M+q,\max}} \right)^2 \frac{1}{C_{bs}} + \left(\frac{M_{y,M+q,a,\max}}{M_{y,M+q,\max}} \right)^2 \frac{1}{C_{ba}} \right]^{-0,5} = \\ = \left[\left(\frac{0,85M_y}{M_y} \right)^2 0,10786 + \left(\frac{0,15M_y}{M_y} \right)^2 0,15714 \right]^{-0,5} = 3,504.$$

Ze wzoru (7):

$$M_y(\xi = 0,25) = 0,925M_y - 1,2M_y \cdot 0,75 = 0,025M_y, \\ M_y(\xi = 0,5) = 0,85M_y - 1,2M_y = -0,35M_y, \\ M_y(\xi = 0,75) = 0,775M_y - 1,2M_y \cdot 0,75 = -0,125M_y.$$

$$C_{bc} = \frac{35}{\sqrt{1 + \left(3 \frac{M_y(\xi = 0,25)}{M_{y,\max}} \right)^2 + \left(4 \frac{M_y(\xi = 0,5)}{M_{y,\max}} \right)^2 + \left(3 \frac{M_y(\xi = 0,75)}{M_{y,\max}} \right)^2}} = \\ = \frac{35}{\sqrt{1 + \left(3 \frac{0,025M_y}{M_y} \right)^2 + \left(4 \frac{-0,35M_y}{M_y} \right)^2 + \left(3 \frac{-0,125M_y}{M_y} \right)^2}} = 3,357.$$

Przykład 2

Obliczenia dotyczą obciążenia momentami podporo-
wymi i siłą skupioną w środku ($\xi_0 = 0,5$ i $\psi_Q = 0$) z para-
metrem $\mu = \frac{PL}{4M_y} = -1,2$.

Z obliczeń przedstawionych w artykule [7]:

$$M_{y,M+Q,s,\max} = 0,85M_y, \quad M_{y,M+Q,a,\max} = 0,15M_y, \\ M_{y,M+Q,\max} = M_y.$$

Momenty w charakterystycznych punktach wynoszą:

$$M_{y,s}(\xi = 0,25) = 0,85M_y - 1,2M_y \cdot 0,5 = 0,25M_y, \\ M_{y,s}(\xi = 0,5) = 0,85M_y - 1,2M_y = -0,35M_y, \\ M_{y,a}(\xi = 0,25) = 0,5 \cdot 0,15M_y = 0,075M_y.$$

Ze wzorów (9):

$$\frac{1}{C_{bs}} = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{M_{y,s}(\xi = 0,25)}{M_{y,M+Q,s,\max}} \right]^2 + \frac{16}{35} \left[\frac{M_{y,s}(\xi = 0,50)}{M_{y,M+Q,s,\max}} \right]^2 = \\ = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{0,25M_y}{0,85M_y} \right]^2 + \frac{16}{35} \left[\frac{-0,35M_y}{0,85M_y} \right]^2 = 0,15057,$$

$$\frac{1}{C_{ba}} = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{M_{y,a}(\xi = 0,25)}{M_{y,M+Q,a,\max}} \right]^2 = \\ = \frac{1}{35} + \frac{18}{35} \left[\frac{0,075M_y}{0,15M_y} \right]^2 = 0,15714.$$

Ze wzoru (2)

$$C_{bc} = \left[\left(\frac{M_{y,M+Q,s,\max}}{M_{y,M+Q,\max}} \right)^2 \frac{1}{C_{bs}} + \left(\frac{M_{y,M+Q,a,\max}}{M_{y,M+Q,\max}} \right)^2 \frac{1}{C_{ba}} \right]^{-0,5} = \\ = \left[\left(\frac{0,85M_y}{M_y} \right)^2 0,15057 + \left(\frac{0,15M_y}{M_y} \right)^2 0,15714 \right]^{-0,5} = 2,984.$$

Ze wzoru (7):

$$M_y(\xi = 0,25) = 0,925M_y - 1,2M_y \cdot 0,5 = 0,325M_y, \\ M_y(\xi = 0,5) = 0,85M_y - 1,2M_y = -0,35M_y, \\ M_y(\xi = 0,75) = 0,775M_y - 1,2M_y \cdot 0,5 = 0,175M_y.$$

$$C_{bc} = \frac{35}{\sqrt{1 + \left(3 \frac{M_y(\xi = 0,25)}{M_{y,\max}} \right)^2 + \left(4 \frac{M_y(\xi = 0,5)}{M_{y,\max}} \right)^2 + \left(3 \frac{M_y(\xi = 0,75)}{M_{y,\max}} \right)^2}} = \\ = \frac{35}{\sqrt{1 + \left(3 \frac{0,325M_y}{M_y} \right)^2 + \left(4 \frac{-0,35M_y}{M_y} \right)^2 + \left(3 \frac{0,175M_y}{M_y} \right)^2}} = 2,892.$$

Porównanie wyników z przykładów 1 i 2

Z zestawienia wyników w tabl. 3 widać, że w wypadku rozpatrywanych w przykładach kombinacji obciążenia, wyniki otrzymane na podstawie wzorów (9) są porównywalne z otrzymanymi na podstawie całkowania analitycznego (3) oraz programu komputerowego LTBeam, z dokładnością akceptowalną w praktyce inżynierskiej. Największe wartości uzyskano ze wzoru analitycznego uwzględniającego całkowanie, a nieco mniejsze z programu LTBeam. Metody przybliżone dają wyniki jeszcze mniejsze, a więc bezpieczne, przy czym zawsze wartości otrzymane z wykorzystaniem wzorów (9) są nieco większe od obliczonych ze wzoru (7).

Tablica 3
Porównanie wyników z przykładu 1 i przykładu 2

Metoda	Współczynnik konwersji		
	symbol	kombinacja $M^+ + q$	kombinacja $M^+ + Q$
Analityczna z całkowaniem analitycznym według wzorów (3)	C_{bc}	3,656	3,942
Analityczna z całkowaniem numerycznym według wzorów (9)		3,504	2,984
Analityczna z całkowaniem numerycznym według wzoru (7)		3,357	2,892
Numeryczna z programu LTBeam	C_{LT}	3,631	3,820

Podsumowanie

Przedstawiono wyniki weryfikacji wzoru z pracy [9] do oszacowania współczynników równoważnego momentu stałego. Weryfikację przeprowadzono z uwzględnieniem ścisłego całkowania zależności podcałkowych będących iloczynem kwadratu momentu zginającego oraz kwadratu funkcji trygonometrycznej sinus [6, 7].

Zastosowanie zależności (9) do przypadku obciążenia momentami podporowymi prowadzi do wyników $1/C_{bs} = 1$, $1/C_{ba} = 0,1571$. Wynik $1/C_{bs} = 1$ ($C_{bc} = 1,000$) odnoszący się do stałego momentu jest wartością ścisłą w sensie analitycznego całkowania funkcji podcałkowej odpowiadającej wykresowi momentu generowanego przez obciążenie momentami podporowymi o tej samej wartości, ale o przeciwnych znakach. Wynik odnoszący się do schematu antysymetrycznego $1/C_{ba} = 0,1571$ ($C_{bc} = 2,523$) różni się od $1/C_{ba} = 0,1307$ ($C_{bc} = 2,766$) – wartości otrzymanej z analitycznego całkowania funkcji podcałkowej odpowiadającej wykresowi momentu generowanego przez obciążenie momentami podporowymi o takiej samej war-

tości i zgodnym znaku. Podobna tendencja występuje w pozostałych przypadkach rozpatrywanych schematów obciążeń, gdy moment maksymalny antysymetrycznego składnika obciążenia nie występuje w przekroju bliskim połowy rozpiętości belki [por. wyniki na rys. 2a odpowiadające sytuacji $Q(x = L/4)$ oraz na rys. 2b odpowiadające sytuacji $Q(x = L/8)$]. W pozostałych wypadkach, gdy moment maksymalny antysymetrycznego składnika obciążenia występuje w przekroju bliskim połowy rozpiętości belki [por. wyniki na rys. 2b odpowiadające sytuacji $Q(x = 3L/8)$] stosowanie wzorów (9) może się okazać mało dokładne.

Zastosowanie wzorów przybliżonych (9) do obliczenia C_{bc} według (2) prowadzi, w wypadku obciążeń złożonych, do uzyskania momentu krytycznego na ogół po stronie bezpiecznej, tym bardziej bezpiecznej, gdy maksymalny moment antysymetrycznego składnika obciążenia występuje w przekroju położonym dalej od połowy rozpiętości belki, ale też niezbyt bliskiej przekrojom podporowym.

PIŚMIENICTWO

- [1] American Institute of Steel Construction (AISC), "ANSI/AISC 360-05 specification for structural buildings". Chicago, USA, 2005.
- [2] Bijak R.: The lateral buckling of simply supported unrestrained bisymmetric I-shape beams. "Archives of Civil Engineering", No. 61(4)/2015.
- [3] Canadian Standards Association. Limit States Design of Steel Structures. CSA, Mississauga, Ontario 2006.
- [4] Kirby P.A., Nethercot D.A.: Design for structural stability. Granada Publishing, Suffolk 1979.
- [5] Nawaz R.: Equivalent Uniform Moment Factor for Lateral Torsional Buckling of Steel Beams. Master of Engineering Report in Structural Engineering, University of Alberta, Department of Civil & Environmental Engineering, Edmonton 2009.
- [6] Pękacka M.: Zwężenie sprężyste stalowych belek dwuteowych poddanych wybranym obciążeniom przęsłowym oraz momentom podporowym. Praca dyplomowa magisterska. Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska, 2020.
- [7] Pękacka M., Barszcz A.M., Giżejowski M.A.: Obliczanie momentu krytycznego stalowych belek o przekroju dwuteowym bisymetrycznym w złożonych stanach obciążenia. "Inżynieria i Budownictwo", nr 1-2/2021.
- [8] Salvadori M.G.: Lateral buckling of I-beams. ASCE Transaction vol. 120, 1955.
- [9] Serna M.A., Lopez A., Puente I., Yong D.J.: Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members. "Journal of Constructional Steel Research", vol. 62, 2006.
- [10] Wong E., Driver R.G.: Critical evaluation of the CSA-S16-01 equivalent moment factor for laterally unsupported beams. University of Alberta, Edmonton 2007.
- [11] Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L.: The behaviour and design of steel structures to EC3. 2nd edition, London-New York, Taylor and Francis 2008.
- [12] Oprogramowanie: LTBeam, Lateral Torsional Buckling of Beams by Ivan Gal  a, CTICM, 2002.

Wersja elektroniczna „Inżynierii i Budownictwa” dostępna na portalach



gazety.PL

<https://www.egazety.pl/fundacja-pzittb/e-wydanie-inzynieria-i-budownictwo.html>

kiosk.PL

http://www.e-kiosk.pl/inzynieria_i_budownictwo

nexto.PL

http://www.nexto.pl/e-prasa/inzynieria_i_budownictwo_p132009.xml