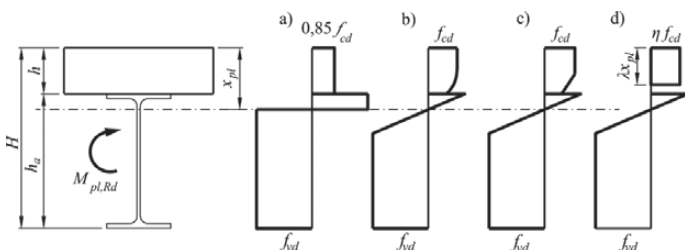


## Nośność graniczna na zginanie stalowo-betonowych belek zespolonych

Według normy [3] nośność graniczną przekroju na zginanie zaleca się obliczać, przypisując materiałom właściwości sztywno-plastyczne (rys. 1a). Wyznaczanie nośności plastycznej na zginanie opiera się na teorii plastyczności, a wynikiem obliczenia jest moment graniczny. Takie założenia w przypadku stali i betonu można stosować według normy [3] tylko w odniesieniu do przekrojów stalowych klasy 1 i 2. Zakłada się, że naprężenia w przekroju belki stalowej osiągają obliczeniową granicę plastyczności  $f_{yd}$  zarówno w strefie rozciąganej, jak i ściskanej, a zbrojenie w ściskanej strefie płyty betonowej można pominąć. Przyjmuje się, że beton w strefie ściskanej przenosi naprężenie równe  $0,85 f_{cd}$ , stałe na powierzchni między plastyczną osią obojętną i skrajnymi włóknami betonu. W metodzie sztywno-plastycznej nie ogranicza się odkształceń betonu.



Rys. 1. Rozkład naprężeń w przekroju przy a) sztywno-plastycznej nośności granicznej oraz nośności nieliniowej w przypadku wykresu w betonie: b) paraboliczno-prostokątnego, c) biliniowego, d) prostokątnego [8]

W normie [3] zezwala się również na określanie nośności przekroju poprzecznego na zginanie na podstawie teorii nieliniowej, według której w obliczeniach należy uwzględnić nieliniową zależność naprężenie – odkształcenie w betonie zgodnie z [1] (rys. 1b, c, d). W tej normie ogranicza się odkształcenia w betonie ściskanym do wartości  $\varepsilon_{cu3}$  lub  $\varepsilon_{cu2}$ , w zależności od przyjętego do obliczeń związku konstytutywnego. Zakłada się, że zespolony przekrój poprzeczny po odkształceniu pozostaje płaski, a naprężenia w stali konstrukcyjnej, zarówno w strefie ściskanej, jak i rozciąganej, wyznacza się z idealnie sprężysto plastycznego wykresu z normy [1].

W niniejszym artykule pierwszą z wyżej wymienionych metod obliczania nośności na zginanie nazywać się będzie nośnością sztywno-plastyczną, a drugą – nośnością nieliniową. W normie [3] zaleca się stosowanie sztywno-plastycznej metody obliczania nośności granicznej przekroju zespolonego na zginanie, z uwagi na znaczne uproszczenie obliczeń [4], przy jednoczesnej wystarczającej do celów praktycznych dokładności wyników [5]. Metoda sztywno-plastyczna ma jednak ograniczenia. Jeżeli zastosowano belkę ze stali S420 lub S460 oraz zasięg strefy ściskanej przekracza 15% całkowitej wysokości przekroju zespolonego,  $x_{pl} > 0,15H$ , to obliczeniową nośność na zginanie należy pomnożyć przez współczynnik redukcyjny  $\beta$ , określony

w [3]. Jeżeli  $x_{pl}$  jest większy niż  $0,4H$ , to nośność na zginanie można określić tylko za pomocą metody nieliniowej lub teorii sprężystości. Ograniczenia te mają związek z niewielką ciągliwością przekroju zespolonego ze strefą ściskaną o niewystarczającej nośności [7, 8].

### Nośność graniczna przy pełnym zespoleniu – metoda sztywno-plastyczna

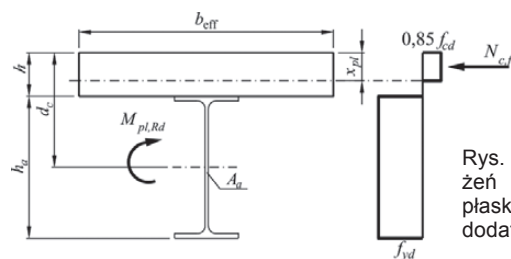
Ze względu na położenie osi obojętnej i rodzaj płyty betonowej (płaska, uźebrowana – zastosowanie płyty fałdowej) w obliczeniach wyodrębnia się kilka przypadków. Przedstawione dalej równania dotyczą tylko płyty płaskiej. Równania w odniesieniu do belek zespolonych z płytą betonową na blaszce fałdowej o żebrach zarówno prostokątnych, jak i równoległych do osi belki można znaleźć w monografii [8]. W tej monografii – w odniesieniu do dwuteowników bisymetrycznych – rozważono wszystkie występujące w praktyce położenia osi obojętnej, zarówno w przypadku momentu dodatniego, jak i ujemnego. Dołączony do niej arkusz kalkulacyjny nr 2 umożliwi sprawne obliczanie nośności plastycznej przekroju na zginanie w sposób automatyczny.

• **Dodatni moment zginający, oś obojętna w płycie betonowej.** Rozkład naprężeń pokazano na rys. 2. Sytuacja taka będzie miała miejsce, gdy  $0,85f_{cd}b_{eff}h \geq f_{yd}A_a$ . Położenie osi obojętnej wyznacza się wtedy z równania

$$0,85f_{cd}b_{eff}x_{pl} = f_{yd}A_a \rightarrow x_{pl} = \frac{f_{yd}A_a}{0,85f_{cd}b_{eff}}, \quad (1)$$

a nośność przekroju zespolonego z zależności

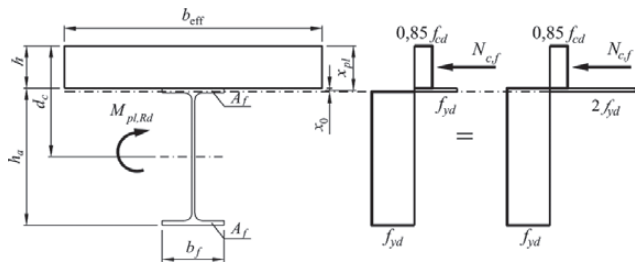
$$M_{pl,Rd} = f_{yd}A_a(d_c - 0,5x_{pl}). \quad (2)$$



Rys. 2. Rozkład naprężeń w przekroju płyty płaskiej przy momencie dodatnim, oś obojętna w płycie [8]

• **Dodatni moment zginający, oś obojętna w półce belki stalowej.** Rozkład naprężeń pokazano na rys. 3. Sytuacja taka będzie miała miejsce, gdy  $f_{yd}A_a > 0,85f_{cd}b_{eff}h \geq f_{yd}(A_a - 2A_f)$ . Wtedy odległość plastycznej osi obojętnej od górnej powierzchni kształtownika stalowego  $x_0$  wyznacza się z równania

$$0,85f_{cd}b_{eff}h + x_0b_f f_{yd} = f_{yd}(A_a - x_0b_f) \rightarrow x_0 = \frac{f_{yd}A_a - 0,85f_{cd}b_{eff}h}{2b_f f_{yd}}. \quad (3)$$



Rys. 3. Rozkład naprężeń w przekroju płyty płaskiej przy momencie dodatnim, oś obojętna w pólce [8]

Położenie osi obojętnej  $x_{pl} = h + x_0$ , a nośność przekroju zespolonego

$$M_{pl,Rd} = 0,85f_{cd}b_{eff}h(0,5h + 0,5x_0) + A_f f_{yd}(0,5h_a - 0,5x_0). \quad (4)$$

Można także przyjąć  $x_{pl} = h$  i pominąć udział górnej półki belki stalowej w zginaniu. Wówczas można w uproszczeniu zapisać

$$M_{pl,Rd} = f_{yd}(A_a - A_f)(d'_c - 0,5h). \quad (5)$$

W powyższych wzorach przyjęto:

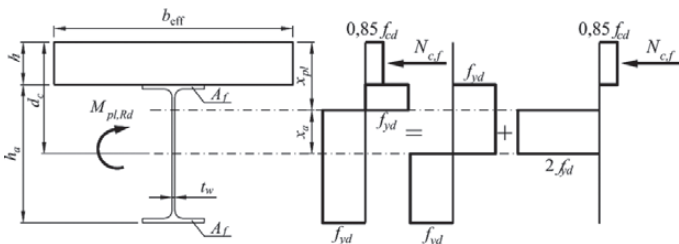
$x_0$  – odległość plastycznej osi obojętnej od górnej powierzchni kształtownika stalowego,

$A_f$  – pole przekroju półki kształtownika stalowego,

$d'_c$  – położenie nowego środka ciężkości belki stalowej względem górnej powierzchni płyty.

• **Dodatni moment zginający, oś obojętna w środku belki stalowej.** Rozkład naprężeń pokazano na rys. 4. Sytuacja taka będzie wówczas, gdy  $0,85f_{cd}b_{eff}h < f_{yd}(A_a - 2A_f)$ . Wtedy odległość plastycznej osi obojętnej od środka kształtownika stalowego  $x_a$  wyznacza się z równania

$$0,85f_{cd}b_{eff}h = 2x_a f_{yd} t_w \rightarrow x_a = \frac{0,85f_{cd}b_{eff}h}{2f_{yd}t_w}. \quad (6)$$



Rys. 4. Rozkład naprężeń w przekroju płyty płaskiej przy momencie dodatnim, oś obojętna w środku [8]

Położenie osi obojętnej  $x_{pl} = d_c - x_a$ , a nośność przekroju zespolonego

$$M_{pl,Rd} = f_{yd}W_{pl} + 0,85f_{cd}b_{eff}h(d_c - 0,5h - 0,5x_a), \quad (7)$$

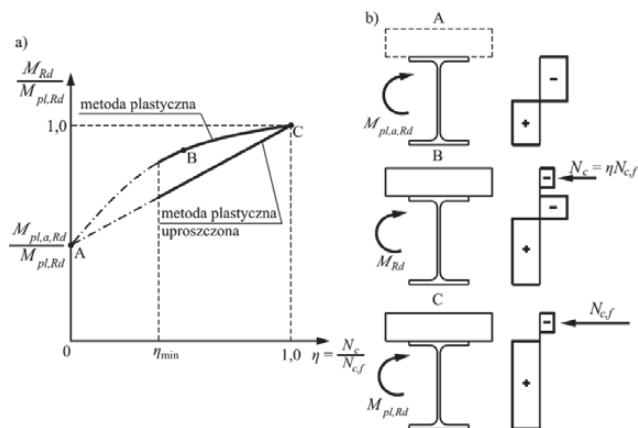
gdzie  $W_{pl}$  – wskaźnik plastyczny przekroju belki stalowej.

### Nośność graniczna przy częściowym zespoleniu

Przy pełnym zespoleniu zakłada się, że efekty poślizgu stali i betonu mogą być pominięte w obliczeniach. W przypadku zespolenia częściowego uwzględnienie efektów poślizgu jest trudne obliczeniowo, przy czym zgodnie z normą [3] można wykonywać obliczenia dwoma uproszczonymi metodami: plastyczną i plastyczną uproszczoną [6]. Metody te można zastosować tylko w odniesieniu do przekrojów stalowych klasy 1 lub 2, w których nośność graniczną przy pełnym zespoleniu obliczono metodą sztywno-plastyczną oraz gdy zastosowano ciągłe

łącniki ścinane (więcej informacji o wymaganiach dotyczących ciągłości łączników oraz ciągłości połączenia na ścinanie zamieszczono w [8]). Położenie osi obojętnej w takim przekroju należy określić po zastosowaniu zredukowanej siły  $N_c$ . Jest to wówczas druga plastyczna oś obojętna znajdująca się wewnątrz przekroju stalowego.

Na rysunku 5a pokazano zależność między nośnością sztywno-plastyczną przekroju  $M_{Rd}$  a stopniem zespolenia  $\eta = N_c/N_{c,f}$  w przypadku ciągłych łączników ścinanych. Obrazuje ją krzywa ABC odpowiadająca nośności obliczonej z wykorzystaniem teorii plastyczności. Punkt A odpowiada zerowemu stopniowi zespolenia, a nośność przekroju jest wówczas nośnością elementu stalowego  $M_{pl,a,Rd}$ , punkt C – pełnemu zespoleniu, a nośność przekroju jest równa nośności granicznej  $M_{pl,Rd}$ , którą omówiono wyżej, natomiast punkt B – nośności na zginanie przy częściowym zespoleniu. Na rysunku 5b pokazano rozkłady naprężeń w odniesieniu do omawianych wyżej punktów wykresu.



Rys. 5. Zależność między momentem a siłą w pólce betonowej w przypadku metody plastycznej i jej uproszczenia (a) i rozkład naprężeń w przekroju przy częściowym zespoleniu w przypadku zastosowania metody plastycznej [3] (b)

Krzywa ABC jest zawsze wypukła, dlatego w normie [3] zezwala się na prowadzenie obliczeń z wykorzystaniem liniowej zależności nośności przekroju od stopnia zespolenia, którą przedstawiono (por. rys. 5a) w postaci linii prostej łączącej punkty A i C. Obliczanie nośności na zginanie przy częściowym zespoleniu, tj. z wykorzystaniem krzywoliniowej zależności ABC, nazwano w tym artykule metodą plastyczną, a z wykorzystaniem prostej AC – metodą plastyczną uproszczoną.

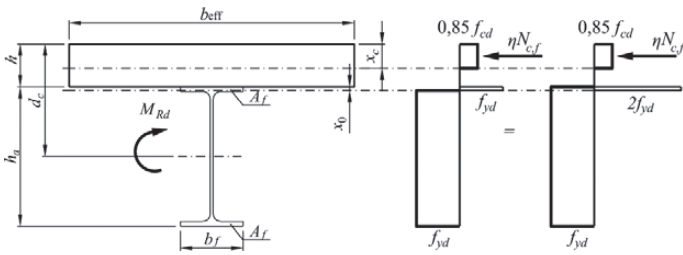
Niżej przedstawiono równania określające nośność przekroju na zginanie przy częściowym zespoleniu (punkt B, por. rys. 5) dla dwuteowników bisymetrycznych. Uwzględniono tylko płytę płaską. Równania dotyczące płyty na blaszce faldowej o żebrach prostokątnych i równoległych do belki są podane w [8], a także uwzględnione w dołączonym do tej książki arkuszu kalkulacyjnym nr 2.

Druga plastyczna oś obojętna może się znajdować w górnej pólce lub w środku belki stalowej.

• **Druga oś obojętna w pólce belki stalowej.** Oś obojętna będzie zlokalizowana w pólce belki stalowej, jeżeli stopień zespolenia będzie spełniał nierówność

$$\eta \geq \frac{f_{yd}(A_a - 2A_f)}{N_{c,f}}, \quad (8)$$

Rozkład naprężeń w przekroju pokazano na rys. 6. Odległość plastycznej osi obojętnej od górnej powierzchni kształtownika stalowego  $x_0$  wyznacza się z równania



Rys. 6. Rozkład naprężeń w przekroju płyty płaskiej, druga oś obojętna w półce [8]

$$\eta N_{c,f} + x_0 b_f f_{yd} = f_{yd} (A_a - x_0 b_f) \rightarrow$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{f_{yd} A_a - \eta N_{c,f}}{2 b_f f_{yd}} \quad (9)$$

Położenie drugiej plastycznej osi obojętnej  $x_{pl} = h + x_0$ , a zasięg zredukowanej strefy ściskanej w betonie

$$x_c = \frac{\eta N_{c,f}}{0,85 f_{cd} b_{eff}} \quad (10)$$

Nośność przekroju zespolonego określona względem osi oddalonej o  $0,5x_0$  od górnej krawędzi półki belki stalowej określa zależność

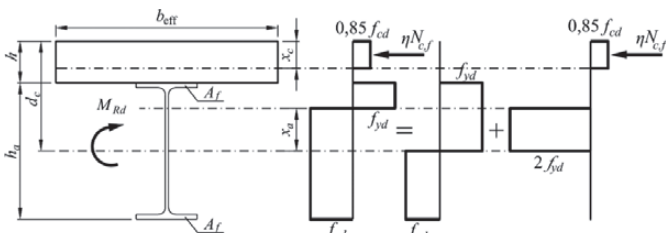
$$M_{Rd} = \eta N_{c,f} (h - 0,5x_c + 0,5x_0) + A_a f_{yd} (0,5h_a - 0,5x_0) \quad (11)$$

• **Druga oś obojętna w środku belki stalowej.** Przypadek ten wystąpi, gdy będzie spełniona nierówność

$$\eta < \frac{f_{yd} (A_a - 2A_f)}{N_{c,f}} \quad (12)$$

Rozkład naprężeń w przekroju pokazano na rys. 7. Odległość drugiej plastycznej osi obojętnej  $x_a$  (odmierzonej od połowy wysokości belki stalowej) wyznacza się z równania

$$\eta N_{c,f} = 2x_a f_{yd} t_w \rightarrow x_a = \frac{\eta N_{c,f}}{2f_{yd} t_w} \quad (13)$$



Rys. 7. Rozkład naprężeń w przekroju płyty płaskiej, druga oś obojętna w środku [8]

Położenie drugiej plastycznej osi obojętnej  $x_{pl} = d_c - x_a$ , a zasięg zredukowanej strefy ściskanej w betonie

$$x_c = \frac{\eta N_{c,f}}{0,85 f_{cd} b_{eff}} \quad (14)$$

Nośność przekroju częściowo zespolonego oblicza się wtedy z zależności

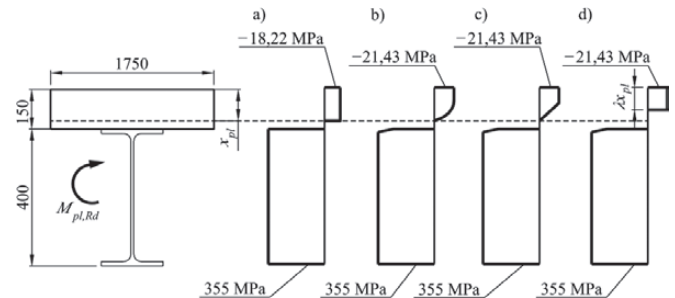
$$M_{pl,Rd} = f_{yd} W_{pl} + \eta N_{c,f} (d_c - 0,5x_c - 0,5x_a) \quad (15)$$

W metodzie uproszczonej wyznaczania nośności plastycznej przekroju przy częściowym zespoleniu według normy [3] korzysta się ze wzoru interpolacyjnego

$$M_{Rd} = M_{pl,a,Rd} + \left( M_{pl,Rd} - M_{pl,a,Rd} \right) \frac{N_c}{N_{c,f}} \quad (16)$$

## Przykład obliczeniowy

Obliczyć nośność graniczną przekroju przedstawionego na rys. 8. Założyć pełne, a następnie częściowe zespolenie stali i betonu, przy stopniu zespolenia  $\eta = 0,8$ .



Rys. 8. Rozkład naprężeń w przekroju zespolonym przy nośności na zginanie: a) sztywno-plastycznej, b), c), d) nieliniowej

Dane:

- beton: C30/37,  $f_{cd} = 30/1,4 = 21,43$  MPa,
- stal:  $f_{yd} = 355$  MPa,
- belka stalowa: IPE400,  $h_a = 400$  mm,  $b_f = 180$  mm,  $t_f = 13,5$  mm,  $A_a = 84,5$  cm<sup>2</sup>,  $J_a = 23$  130 cm<sup>4</sup>,  $M_{pl,a} = 464,0$  kN·m,
- płyta betonowa o wymiarach:  $b_{eff} \times h = 1750 \times 150$  mm.

### • Nośność graniczna przy pełnym zespoleniu

Według teorii sztywno-plastycznej nośność półki betonowej na ściskanie według teorii sztywno-plastycznej

$$0,85 f_{cd} b_{eff} h = 0,85 \cdot 21,43 \cdot 1750 \cdot 150 = 4781,6 \text{ kN.}$$

Nośność na rozciąganie kształtownika stalowego  $f_{yd} A_a = 35,5 \cdot 84,5 = 2999,8$  kN i jest większa od nośności płyty betonowej, a więc oś zginania znajduje się w półce płyty betonowej. Zasięg strefy ściskanej w stanie granicznym nośności

$$x_{pl} = \frac{f_{yd} A_a}{0,85 f_{cd} b_{eff}} = \frac{355 \cdot 84,5}{0,85 \cdot 21,43 \cdot 1750} \cdot 10 = 94 \text{ mm.}$$

Nośność graniczna na zginanie przekroju zespolonego

$$M_{pl,Rd} = f_{yd} A_a (d_c - 0,5x_{pl}) =$$

$$= 35,5 \cdot 84,5 (0,5 \cdot 40 + 15 - 0,5 \cdot 9,4) \cdot 10^{-2} = 908,9 \text{ kN} \cdot \text{m.}$$

W tablicy przedstawiono porównanie zasięgu strefy ściskanej  $x_{pl}$  oraz nieliniowej nośności granicznej na zginanie  $M_{pl,Rd}$ , które obliczono z wykorzystaniem metody sztywno-plastycznej oraz metody nieliniowej w przypadku rozważanych zależności naprężenie – odkształcenie w betonie ściskanym (por. rys. 1b, c, d). Wszystkie wartości momentu zginającego obliczone metodą nieliniową są większe od wartości nośności wyznaczonej metodą sztywno-plastyczną. Największe różnice w wynikach wynoszą około 2%, co potwierdza zasadność uproszczenia obliczeń nośności na zginanie w typowych przypadkach, zastosowanego w [3]. Rozkład naprężeń w przekroju

### Zestawienie nośności na zginanie obliczonych różnymi metodami

Położenie osi obojętnej i nośność	Metoda sztywno-plastyczna	Metoda nieliniowa, wykres paraboliczno-prostokątny	Metoda nieliniowa, wykres biliniowy	Metoda nieliniowa, wykres prostokątny
$x_{pl}$ , mm	94	99	106	100
$M_{pl,Rd}$ , kN·m	908,9	926,3	924,2	929,6

odpowiadający sztywno-plastycznej nośności na zginanie przedstawiono na rys. 8a. Rozkład ten w przypadku nośności nieliniowej o wykresie naprężeń w betonie ściskanym paraboliczno-prostokątnym przedstawiono na rys. 8b, biliniowym – na rys. 8c oraz prostokątnym – na rys. 8d.

### • Nośność graniczna na zginanie przy częściowym zespoleniu

Sprawdzenie położenia drugiej osi obojętnej

$$\eta = 0,80 > \frac{f_{yd}(A_a - 2A_f)}{N_{c,f}} = \frac{35,5 \cdot (84,5 - 2 \cdot 18 \cdot 1,35)}{2999,8} = \frac{35,5 \cdot 35,9}{2999,8} = 0,425.$$

Druga oś obojętna jest zlokalizowana w górnej półce belki stalowej. Odległość drugiej plastycznej osi obojętnej od górnej powierzchni kształtownika stalowego

$$x_0 = \frac{f_{yd}A_a - \eta N_{c,f}}{2b_f f_{yd}} = \frac{35,5 \cdot 84,5 - 0,80 \cdot 2999,8}{2 \cdot 18 \cdot 35,5} = 0,47 \text{ cm.}$$

Położenie drugiej plastycznej osi obojętnej

$$x_{pl} = h + x_0 = 15 + 0,47 = 15,47 \text{ cm.}$$

Zasięg zredukowanej strefy ściskanej w betonie

$$x_c = \frac{\eta N_{c,f}}{0,85 f_{cd} b_{eff}} = \frac{0,80 \cdot 2999,8}{0,85 \cdot 2,14 \cdot 175} = \frac{2829,9}{254,7} = 7,54 \text{ cm.}$$

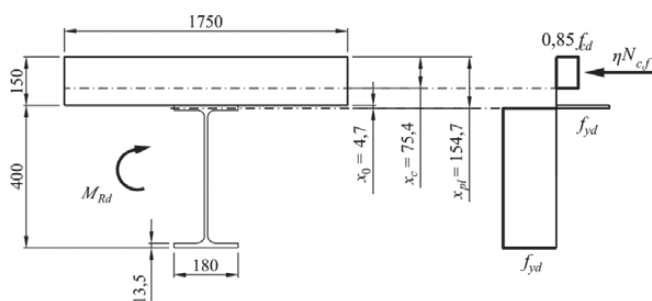
Nośność przekroju zespolonego określona z równań równowagi (metoda plastyczna)

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= \eta N_{c,f} (h - 0,5x_c + 0,5x_0) + f_{yd} A_a (0,5h_a - 0,5x_0) = \\ &= 0,80 \cdot 2999,8 \cdot (15 - 0,5 \cdot 7,54 + 0,5 \cdot 0,47) \cdot 10^{-2} + \\ &+ 35,5 \cdot 84,5 \cdot (0,5 \cdot 40 - 0,5 \cdot 0,47) \cdot 10^{-2} = \\ &= 275,1 + 592,9 = 868,0 \text{ kN} \cdot \text{m.} \end{aligned}$$

Nośność przekroju zespolonego określona metodą plastyczną uproszczoną (prosta A-C, por. rys. 5)

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= M_{pl,a,Rd} + (M_{pl,Rd} - M_{pl,a,Rd}) \eta = \\ &= 464,0 + (908,9 - 464,0) \cdot 0,8 = 819,9 \text{ kN} \cdot \text{m.} \end{aligned}$$

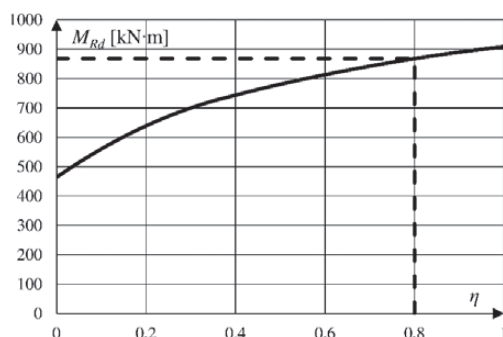
Na rysunku 9 przedstawiono rozkład naprężeń w przekroju częściowo zespolonym, a na rys. 10 – zależność momentu granicznego  $M_{pl,Rd}$  od stopnia zespolenia  $\eta$  według metody plastycznej, wykreślona za pomocą arkusza kalkulacyjnego nr 2 dołączonego do książki [8].



Rys. 9. Rozkład naprężeń w przekroju częściowo zespolonym

### Podsumowanie

Według normy [3] nośność graniczną przekroju przy pełnym zespoleniu można obliczać, przypisując materiałowi właściwości sztywno-plastyczne (skrócone określenie



Rys. 10. Zależność nośności granicznej na zginanie przy częściowym zespoleniu

tak wyznaczonej nośności granicznej to nośność sztywno-plastyczna) lub właściwości nieliniowe (w skrócie nośność nieliniowa). W pierwszym przypadku wytrzymałość betonu na ściskanie zmniejsza się o 15% i w wyniku obliczeń, zgodnie z teorią plastyczności, otrzymuje się bezpieczne oszacowanie nośności granicznej przekroju na zginanie. W drugim przypadku korzysta się ze związków konstytutywnych dotyczących betonu, zawartych w normie [1], oraz ze sprężysto idealnie plastycznej zależności dla stali konstrukcyjnej, zgodnie z [2]. Zakłada się, że jest spełniona zasada płaskich przekrojów, a nośność graniczną wyznacza się przy założeniu, że w betonie ściskanym graniczne odkształcenia wynoszą  $\epsilon_{cu3}$  lub  $\epsilon_{cu2}$  (zależnie od przyjętego do obliczeń wykresu naprężenie – odkształcenie betonu). W wyniku obliczeń metodą nieliniową otrzymuje się, w typowych przypadkach, prawie identyczne wartości nośności na zginanie, lecz obliczenia prowadzone tą metodą są bardziej skomplikowane niż prowadzone metodą sztywno-plastyczną. Częściowe zespolenie w belkach według normy [3] zaleca się uwzględnić za pomocą dwóch metod: metody plastycznej oraz plastycznej uproszczonej. Obie te metody można stosować tylko wówczas, gdy nośność graniczną na zginanie obliczono metodą sztywno-plastyczną, zastosowano ciągłe łączniki na ścinanie, a przekrój belki stalowej jest klasy 1 lub 2 [3, 8].

W artykule przedstawiono równania umożliwiające obliczenie sztywno-plastycznej nośności na zginanie przekrojów belek zespolonych z płytą pełną przy pełnym i częściowym zespoleniu. Zaprezentowano przykład, w którym wyniki obliczeń nośności na zginanie przy pełnym zespoleniu otrzymane za pomocą metody sztywno-plastycznej porównano z wynikami obliczeń otrzymanymi metodą nieliniową.

### PIŚMIENICTWO

- [1] PN-EN 1992-1-1:2008 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [2] PN-EN 1993-1-1:2006 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [3] PN-EN 1994-1-1:2008 Eurokod 4: Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo-betonowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [4] Johnson R., Anderson D.: Composite Beams, Connections, and Frames at Ultimate Limit States. IABSE REPORTS, 1992.
- [5] Johnson R., Anderson D.: Partial safety factors YM for composite beams in bending, found from test data, in Technical Reports CE38 and CE40. 1992, University of Warwick, Engineering Department.
- [6] Johnson R., Molenstra N. and EPIIB: Partial shear connection in composite beams for buildings. "Proceedings of the Institution of Civil Engineers", No. 91(4)/1991.
- [7] Rotter J., Ansourian P.: Cross-section behaviour and ductility in composite beams. 1978.
- [8] Szmigiera E., Niedośpiół M., Grzeszykowski B.: Projektowanie konstrukcji zespolonych stalowo-betonowych. Część 1 – Elementy zginane. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019.